ÜBER

EIN PRINCIP ZUR ERZEUGUNG VON COVARIANTEN.

VON

DR. B. IGEL,

DOCENT AN DER K. K. TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN WIEN.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 7. DECEMBER 1882.

In der nachstehenden Arbeit handelt es sich um die Aufstellung eines Princips zur Erzeugung von Covarianten eines Systems dreier binären Formen von derselben Ordnung aus den Invarianten zweier Formen, von denen die eine eine Fundamentalform des Systems und die andere nach einen bestimmten Gesetze aus dem Systeme gebildet ist.

§ 1.

Es seien, unter n eine gerade Zahl verstanden, drei ganze rationale Functionen

$$f_1(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$
$$f_2(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n$$
$$f_3(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_{n-1} x + c_n$$

ohne gemeinschaftlichen Theilen gegeben. Wir setzen für die Folge fest, dass die Wurzeln der Gleichungen

$$f_1 = 0 \quad f_2 = 0 \quad f_3 = 0$$

bezüglich durch folgende Buchstaben bezeichnet werden:

$$a, b, c \ldots i$$
$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \ldots \mathfrak{i}$$
$$\alpha, \beta, \gamma \ldots \iota$$

Stellen wir uns die Aufgabe, diejenigen Werthe von λ zu bestimmen, für welche die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= 0 \\ f_2(x) + \lambda f_3(x) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad 1.)$$

zugleich bestehen, so finden wir, indem wir x aus diesen Gleichungen eliminiren, eine Gleichung in λ

$$R(f_1, f_2 + \lambda f_3) = 0 \qquad 2.)$$

wo wir unter diesem Symbole die Resultante der Gleichungen 1.) vorstellen. Da die Gleichung 2.) offenbar vom $n$ten Grade in λ ist, so erhalten wir n Werthe von λ und demgemäss die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} f_2+\lambda_1 f_3=0 \\ f_2+\lambda_2 f_3=0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ f_2+\lambda_n f_3=0, \end{array}\right\} \quad 3.)$$

von denen jede eine gemeinschaftliche Wurzel mit $f_1=0$ hat. Da ferner die Wurzeln der Gleichung 2.) resp. den folgenden Verhältnissen gleich sind:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1=-f_2(a):f_3(a) \\ \lambda_2=-f_2(b):f_3(b) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \lambda_n=-f_2(i):f_3(i), \end{array}\right\} \quad 4.)$$

so kann die Gleichung 2) als diejenige Gleichung aufgefasst werden, deren Wurzeln rationale Functionen der Wurzeln der Gleichung $f_1=0$ sind. Setzt man in den Gleichungen 3) die λ-Werthe aus 4) ein, so dass sie die Form erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} f_2(x)f_3(a)-f_2(a)f_3(x)=0 \\ f_2(x)f_3(b)-f_2(b)f_3(x)=0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ f_2(x)f_3(c)-f_2(i)f_3(x)=0, \end{array}\right\} \quad 5.)$$

so hat jede dieser Gleichungen nebst der mit $f_1=0$ gemeinschaftlichen Wurzel noch $n-1$ Wurzeln, von denen eine jede eine Function jener Wurzel ist. Es entsprechen demnach jeder Wurzel von $f_1=0$ $n-1$ Werthe, die mit ihr durch eine Gleichung verknüpft sind. Dass sich jene Wurzel rational durch jede der mit ihr durch eine Gleichung verknüpften Wurzeln ausdrücken lassen müsse, ist klar, und ich will nun zeigen, wie dieses geschieht. Es ist offenbar, dass die Resultante

$$R(f_1\;\; f_2+\lambda f_3)$$

in das Product:

$$(f_2+\lambda_1 f_3)(f_2+\lambda_2 f_3)\cdots(f_2+\lambda_n b_3)$$

übergeht, wenn man in ihr $\lambda=f_2:f_3$ setzt. Und da jeder der Factoren einen linearen Factor von $f_1(x)$ enthält, so muss,

$$R(f_1\;\; f_2+\lambda f_3)$$

die Form haben:

$$R(f_1\;\; f_2+\lambda f_3)=f_1(x)\psi(x).$$

Es handelt sich jetzt darum, die Form ψ zu eruiren. Zu diesem Zwecke führe ich folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{array}{l} f_1(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=A^x \\ f_2(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n=B^x \\ f_3(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n=C^x \\ f_1(y)=a_0+a_1y+a_2y^2+\ldots+a_ny^n=A^y \\ f_2(y)=b_0+b_1y+b_2y^2+\ldots+b_ny^n=B^y \\ f_3(y)=c_0+c_1y+c_2y^2+\ldots+c_ny^n=C^y, \end{array}$$

so dass die Gleichungen 3.) folgende Form haben:

$$\begin{vmatrix} B^x & C^x \\ B^a & C^a \end{vmatrix}=0 \quad \begin{vmatrix} B^x & C^x \\ B^b & C^b \end{vmatrix}=0 \;\ldots\; \begin{vmatrix} B^x & C^x \\ B^i & C^i \end{vmatrix}=0.$$

Wie man leicht einsieht, hat ψ die Form:

$$\psi = \begin{vmatrix} B^x & C^x \\ B^a & C^a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B^x & C^x \\ B^b & C^b \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} B^c & C^x \\ B^i & C^i \end{vmatrix} \frac{1}{(x-a)(x-b)\ldots(x-i)}$$

oder auch, wie eine leichte Umformung zeigt,

$$\psi = \begin{vmatrix} B^x & \dfrac{B^a-B^c}{a-x} \\ C^x & \dfrac{C^a-C^x}{a-x} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B^x & \dfrac{B^b-B^x}{b-x} \\ C^x & \dfrac{C^b-C^x}{b-x} \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} B^x & \dfrac{B^c-B^x}{i-x} \\ C^x & \dfrac{C^c-C^x}{i-x} \end{vmatrix}.$$

Setzt man nun

$$X = \begin{vmatrix} B^x & \dfrac{B^y-B^x}{y-x} \\ C^x & \dfrac{C^y-C^x}{y-x} \end{vmatrix}, \tag{6.)}$$

so sieht man, dass ψ aus X entsteht, indem man in X für y successive alle Wurzeln von $f_1 = 0$ setzt und die Resultate mit einander multiplicirt, d. h. dass ψ die Resultante von f_1 und X ist. Nun ist, wenn man X entwickelt,

$$X = (B_{00}\, C_{1n}) + (B_{01}\, C_{2n})y + (B_{02}\, C_{3n})y^2 + \ldots + (B_{0n-1}\, C_{nm})y^{n-1},$$

wo

$$B_{ik} = b_i + b_{i+1}\, x + \ldots + b_k x^{i-k}$$
$$C_{ik} = C_i + C_{i+1}\, x + \ldots + C_k x^{i-k}$$

und

$$(B_{ik}\, C_{nm}) = B_{ik}\, C_{nm} - B_{nm}\, C_{ik};$$

folglich ist

$$\psi = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_n & & & \\ & a_0 & \ldots & a_{n-1} & a_n & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & a_0 & a_1 & \ldots & a_n \\ (B_{00}\, C_{1n}) & (B_{01}\, C_{2n}) & \ldots & (B_{0n-1}\, C_{nm}) & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & (B_{00}\, C_{1n}) & \ldots & & (B_{0n-1}\, C_{nm}) \end{vmatrix}. \tag{7.)}$$

$\psi = 0$ gibt nun die Werthe von x, die zusammen mit den Wurzeln von $f_1 = 0$ die Werthepaare liefern, für welche $X = 0$ wird, und wir erhalten die Wurzeln von $f_1 = 0$ als rationale Functionen der Wurzeln der Gleichungen 3) ausgedrückt. Diesen Abschnitt habe ich fast wörtlich meiner Arbeit[1] „Über eine Classe von Abel'schen Gleichungen" entnommen.

§. 2.

Die Form ψ ist eine Covariante der drei fundamentalen binären Formen, was man auf zweierlei Weise einsehen kann.

Erstens vermöge ihrer Eigenschaft, ein Factor in der Form

$$R(f_1, f_2 + \lambda f_3)$$

zu sein. Da sich nämlich diese, wie wir wissen, folgendermassen schreiben lässt

$$R(f_1, f_2+\lambda f_3) = (f_2+\lambda_1 f_3)\,(f_2+\lambda_2 f_3)\ldots(f_2+\lambda_n f_3)$$
$$= A f_2^n + B f_2^{n-1} f_3 + \ldots + N f_3^n$$

[1] Siehe Denkschriften der kais. Akademie der Wissenschaften, Bd. XLV.

und also vermöge ihrer Zusammensetzung aus den fundamentalen Formen eine Covariante ist, so muss sie es auch bleiben, wenn man von ihr den invarianten Factor f_1 ablöst. Nach Ausscheidung dieses Factors geht aber $R(f_1, f_2+\lambda f_3)$ in die Form ψ über, folglich muss dieselbe eine Covariante des Systems sein.

Zweitens vermöge ihrer Eigenschaft, eine Resultante der Invarianten Formen X und f_1 zu sein, indem X offenbar ebenfalls eine Covariante des Systems mit zwei Reihen von Veränderlichen ist. Diese Doppeleigenschaft der Form ψ, einerseits eine Covariante des Systems und anderseits eine Resultante zweier Formen zu sein, führt nun auf ein bemerkenswerthes Princip zur Erzeugung von Covarianten eines Systems dreier Formen von derselben Ordnung. Es ist nämlich durch Clebsch bekannt, dass jede Resultante zweier Formen sich auf niedere Invarianten zurückführen lassen muss; die Form ψ muss sich daher auf solche niedere Formen zurückführen lassen, welche in Bezug auf die Formen X und f_1 Invarianten und in Bezug auf das System Covarianten sind. Wenn man im Stande ist, die Resultante zweier Formen, von denen die eine von der $n$ten und die zweite von der $(n-1)$ten Ordnung ist, in ein Aggregat von niederen Invarianten zu zerlegen, so kann man Covarianten eines Systems von drei Formen $n$ter Ordnung nach folgender Regel herstellen: Man bilde die simultanen Covarianten mit zwei Reihen von Veränderlichen

$$X_1 = \begin{vmatrix} B^x \dfrac{B^y-B^x}{y-x} \\ C^x \dfrac{C^y-C^x}{y-x} \end{vmatrix}, \quad X_2 = \begin{vmatrix} A^x \dfrac{A^y-A^x}{y-x} \\ C^x \dfrac{C^y-C^x}{y-x} \end{vmatrix} \quad X_3 = \begin{vmatrix} A^x \dfrac{A^y-A^x}{y-x} \\ B^x \dfrac{B^y-B^x}{y-x} \end{vmatrix},$$

ferner die Resultanten

$$R(X_1 f_1),\ R(X_2 f_2),\ R(X_3 f_3)$$

und zerlege dieselben in niedere Invarianten, dann sind diese Covarianten des Systems. Es ist aber bis jetzt, so viel mir bekannt ist, die Zurückführung der Resultanten auf niedere Formen nur in sehr wenigen Fällen gelungen und deshalb muss ich für jetzt die Untersuchung auf ein System dreier binären cubischen Formen beschränken. Für dieses werde ich mittelst des entwickelten Princips eine Reihe von Covarianten geben.

§. 3.

Es sollen vorerst einige Beispiele die Richtigkeit der eben entwickelten Princips bestätigen. Es seien drei quadratische Formen, von der Homogenität absehend.

$$f = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$$
$$\varphi = b_0 x^2 + b_1 x + b_2$$
$$\psi = c_0 x^2 + c_1 x + c_2.$$

Die Form X_3 hat hier folgende Gestalt

$$X_3 = \frac{f(x)\varphi(y) - f(y)\varphi(x)}{x-y}$$
$$= \{(a_1 b_0 - a_0 b_1)x + (a_2 b_0 - a_0 b_2)\} y + \{(a_2 b_0 - a_0 b_2)x + (a_2 b_1 - a_1 b_2)\}$$

oder, wenn man zur Abkürzung die Indices statt den Buchstaben einführt,

$$X_3 = \{(10)x + (20)\} y + \{(20)x + (21)\}.$$

Die Resultante der Formen X_3 und ψ ist bekanntlich

$$\begin{aligned} R(X_3\psi) &= c_0\{(20)x+(21)\}^2 - c_1\{(10)x+(20)\}\ \{(20)x+(21)\} \\ &\quad + c_2\{(10)x+(20)\}^2 \\ &= c_0\{(20)^2x^2+2(20)\ (21)x+(21)^2\} \\ &\quad - c_1\{(10)\ (20)x^2+(10)\ (21)x+(20)^2x+(20)\ (21)\} \\ &\quad + c_2\{(10)^2x^2+2(10)\ (20)x+(20)^2\}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also eine quadratische Covariante der drei Formen. Nun wissen wir aber, dass drei binäre quadratische Formen keine Covariante zweiter Ordnung ausser den Functionaldeterminanten besitzen, wir müssen daher, wenn das obige Princip richtig ist, schliessen, dass die eben hingeschriebene Covariante sich auf schon bekannte Formen, nämlich auf die ursprünglichen Formen und ihre Functionaldeterminanten, zurückführen lassen muss. In der That ist dies der Fall. Bezeichnen wir, wie üblich, mit R_{123} und J folgende Formen

$$R_{123} = \begin{vmatrix} a_0 a_1 a_2 \\ b_0 b_1 b_2 \\ c_0 c_1 c_2 \end{vmatrix} = c_0(12) - c_1(02) + c_2(01)$$

$$J = \begin{vmatrix} 2a_0 x + a_1, & a_1 x + 2a_2 \\ 2b_0 x + b_1, & b_1 x + 2b_2 \end{vmatrix}$$
$$= 2(01)x^2 + 4(02)x + 2(12),$$

so ist, wenn wir die Zahl 2 vernachlässigen,

$$\begin{aligned} R_{123}\, J &= \{c_0(12) - c_1(02) + c_2(01)\}\ \{(01)x^2 + 2(02)x + (12)\} \\ &= c_0\{(12)\ (01)x^2 + 2(12)\ (02)x + (12)^2\} \\ &\quad - c_1\{(02)\ (01)x^2 + 2(02)^2 x + (02)\ (12)\} \\ &\quad + c_2\{(01)^2 x^2 + 2(01)\ (02)x + (01)\ (12)\}. \end{aligned}$$

Wir können die oben erhaltene quadratische Covariante durch Umformung auf diese Form bringen, wobei noch ein Ausdruck hinzutritt, der wieder eine schon bekannte Covariante ist. Der Ausdruck für $R(X_3\psi)$ lässt sich nämlich folgendermassen schreiben

$$\begin{aligned} R(X_3\psi) &= c_0\{(12)\ (01)x^2 + 2(12)\ (02)x + (12)^2\} + c_0(20)^2 x - c_0(01)\ (12)x^2 \\ &\quad - c_1\{(02)\ (01)x^2 + 2(02)^2 x + (02)\ (12)\} + c_1(02)^2 x - c_1(10)\ (21)x \\ &\quad + c_2\{(10)^2 x^2 + 2(10)\ (20)x + (01)\ (12)\} + c_2(02)^2 - c_2(01)\ (12) \\ &= J.\, R_{123} + c_0\{(20)^2 - (01)\ (12)\}x^2 + c_1\{(20)^2 - (10)\ (21)\}x \\ &\quad + c_2\{(20)^2 - (01)\ (12)\}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck in den eckigen Klammern ist bekanntlich die Resultante von f und φ, wir erhalten daher die Formel

$$R(X_3\psi) = \tfrac{1}{2}R_{123} \cdot J + R(f,\ \varphi) \cdot \psi_3.$$

§. 4.

Es seien f_1, f_2 und f_3 drei binäre cubische Formen

$$\begin{aligned} f_1 &= a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 \\ f_2 &= b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3 \\ f_3 &= c_0 x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3. \end{aligned}$$

Die Formen X_1, X_2, X_3 sind entwickelt

$$X_1 = \frac{f_2(x) f_3(y) - f_2(y) f_3(x)}{x - y}$$

$$\begin{aligned} &= \{(b_1 c_0 - b_0 c_1)x^2 + (b_2 c_0 - b_0 c_2)x + (b_3 c_0 - b_0 c_3)\}y^2 \\ &\quad + \{(b_2 c_0 - b_0 c_2)x^2 + [(b_3 c_0 - b_0 c_3) + (b_2 c_1 - b_1 c_2)]x + (b_3 c_1 - b_1 c_3)\}y \\ &\quad + \{(b_3 c_0 - b_0 c_3)x^2 + (b_3 c_1 - b_1 c_3)x + (b_3 c_2 - b_2 c_3)\} \\ &= \{(10)_{23} x^2 + (20)_{23} x + (30)_{23}\}y^2 + \{(20)_{23} x^2 + [(30)_{23} + (21)_{23}]x + (31)_{23}\}y \\ &\quad + \{(30)_{23} x^2 + (31)_{23} x + (32)_{23}\}, \end{aligned}$$

wo die an den runden Klammern angefügten Indices andeuten, dass die Determinanten aus den Coëfficienten $f_2 f_3$ gebildet sind,

$$X_2 = \frac{f_1(x) f_3(y) - f_1(y) f_3(x)}{x-y}$$

$$= \{(a_1 c_0 - a_0 c_1) x^2 + (a_2 c_0 - a_0 c_2) x + (a_3 c_0 \; a_0 c_3)\} y^2$$
$$+ \{(a_2 c_0 - a_0 c_2) x^2 + [(a_3 c_0 - a_0 c_3) + (a_2 c_1 - a_1 c_2)] x + (a_3 c_1 - a_1 c_3)\} y$$
$$+ \{(a_3 c_0 - a_0 c_3) x^2 + (a_3 c_1 - a_1 c_3) x + (a_3 c_2 - a_2 c_3)\}$$
$$= \{(10)_{13} x^2 + (20)_{13} x + (30)_{13}\} y^2 + \{(20)_{13} x^2 + [(30)_{13} + (21)_{13}] x + (31)_{13}\} y$$
$$+ \{(30)_{13} x^2 + (31)_{13} x + (32)_{13}\}.$$

$$X_3 = \frac{f_1(x) f_2(y) - f_1(y) f_2(x)}{x-y}$$

$$= \{(a_1 b_0 - a_0 b_1) x^2 + (a_2 b_0 - a_0 b_2) x + (a_3 b_0 - a_0 b_3)\} y^2$$
$$+ \{(a_2 b_0 - a_0 b_2) x^2 + [(a_3 b_0 - a_0 b_3) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)] x + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\} y$$
$$+ \{(a_3 b_0 - a_0 b_3) x^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) x + (a_3 b_2 - a_2 b_3)\}$$
$$= \{(10)_{12} x^2 + (20)_{12} x + (30)_{12}\} y^2 + \{(20)_{12} x^2 + [(30)_{12} + (21)_{12}] x + (31)_{12}\} y$$
$$+ \{(30)_{12} x^2 + (31)_{12} x + (32)_{12}\}.$$

Bildet man die Resultante von X_3 und f_3, so lässt sich dieselbe bekanntlich auf folgende Form bringen

$$R(X_3 f_3) = -2D A_0 + A_1,$$

wo D die Discriminante von X_3 ist, A_0 und A_1 die simultanen Invarianten von X_3 und f_1 sind. Die Discriminante D ist in geschlossener Form

$$D = \begin{vmatrix} 2(A_{00} B_{13}) & (A_{01} B_{23}) \\ (A_{01} B_{23}) & 2(A_{02} B_{33}) \end{vmatrix}$$

wenn man

$$(A_{00} B_{13}) = \alpha_{10} + \alpha_{01} x + \alpha_{02} x^2$$
$$(A_{01} B_{23}) = \alpha_{10} + \alpha_{11} x + \alpha_{12} x^2$$
$$(A_{02} B_{33}) = \alpha_{20} + \alpha_{21} x + \alpha_{22} x^2$$

setzt und α_{ik} die zweigliedrigen Determinanten bedeuten lässt. Entwickeln wir die Determinante D, so haben wir

$$D = 4\{(10)x^2 + (20)x + (30)\}\{(30)x^2 + (31)x + (32)\}$$
$$- \{(20)x^2 + [(30) + (21)]x + (31)\}^2$$
$$= 4\{(10)(30) - (20)\} x^4 + \{4(10)(31) + 2(30)(20) - 2(20)\, 21)\} x^3$$
$$+ \{4(10)(32) + 3(30)^2 + 2(20)(31) - (21)^2 - 2(30)(21)\} x^2$$
$$+ \{4(20)(32) + 2(31)(30) - 2(21)(31)\} x + \{(30)(32) - (31)^2\}.$$

Nach dem oben entwickelten Principe hätten wir also eine simultane biquadratische Covariante für das System zweier cubischen Formen, was bekanntlich nicht der Fall ist, da zwei cubische Formen nur e i n e biquadratische Covariante, nämlich ihre Functionaldeterminante, besitzen. Wir müssen daraus schliessen, dass D sich durch schon bekannte Formen ausdrücken lässt, dies ist aber in der That der Fall, wie man sich durch eine kleine Rechnung leicht überzeugt. Es ist nämlich

$$3J = (01)x^4 + 2(02)x^3 y + [3(03) + (12)] x^2 y^2 + 2(13) x y^3 + (23) y^4,$$

wo J die Functionaldeterminante der Formen f_1 und f_2 ist, und die zweiten Ableitungen derselben sind

$$\frac{3}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} = 6(01)x^2 + 6(02)xy + [3(03) + (12)]y^2$$

$$\frac{3}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial x \partial y} = 3(02)x^2 + 2[3(03) + (12)]xy + 3(13)y^2$$

$$\frac{3}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial y^2} = [3(03) + (12)]x^2 + 6(13)xy + 6(23)y^2.$$

Bilden wir nun die Hesse'sche Determinante von J und bezeichnen dieselbe mit $H(J)$, so ist

$$\frac{4}{9}H(J) = \begin{vmatrix} 6(01)x^2 + 6(02)xy + [3(03) + (12)]y^2, & 3(02)x^2 + 2[3(03) + (12)]xy + 3(13)y^2 \\ 3(02)x^2 + 2[3(03) + (12)]xy + 3(13)y^2, & [3(03) + (12)]x^2 + 6(13)xy + 6(23)y^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 6(01) & 3(02) \\ 3(02) & 3(03) + (12) \end{vmatrix} x^4 + \left\{ \begin{vmatrix} 6(01) & 2[3(03) + (12)] \\ 3(02) & 6(13) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6(02) & 3(02) \\ 2[3(03) + (12)] & [3(03) + (12)] \end{vmatrix} \right\} x^3 y$$

$$+ \left\{ \begin{vmatrix} 6(01) & 3(13) \\ 3(02) & 6(23) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6(02) & 2[3(03) + (12)] \\ 2[3(03) + (12)] & 6(13) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} [3(03) + (12)] & 3(02) \\ 3(13) & [3(03) + (12)] \end{vmatrix} \right\} x^2 y^2$$

$$+ \left\{ \begin{vmatrix} 6(02) & 3(13) \\ 2[3(03) + (12)] & 6(23) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} [3(03) + (12)] & 2[3(03) + (12)] \\ 3(13) & 6(13) \end{vmatrix} \right\} x y^3 + \begin{vmatrix} [3(03) + (12)] & 3(13) \\ 3(13) & 6(23) \end{vmatrix} y^4$$

$$= 9[2(02)\ (03) + \tfrac{2}{3}(01)\ (12) - (02)^2]x^4 + 9[4(01)\ (13) - 2(02)\ (03) - \tfrac{2}{3}(02)\ (12)]x^3 y$$
$$+ 9[4(01)\ (23) + 2(02)\ (13) - 3(03)^2 - 2(03)\ (12) - \tfrac{1}{3}(12)^2]x^2 y^2$$
$$+ 9[4(02)\ (23) - \tfrac{2}{3}(12)\ (13) - 2(03)\ (13)]x y^3 + 9[2(03)\ (23) + \tfrac{2}{3}(12)\ (23) - (13)^2]y^4.$$

Setzt man $y = 1$, dividirt durch 9 und addirt zu $\frac{4}{81}H(J)$ das Product $2PJ$, wo P die einfachste simultane Invariante zweier cubischen Formen ist

$$P = (03) - \tfrac{1}{3}(12),$$

so findet man den obigen Ausdruck für D, so dass wir haben:

$$D = \frac{4}{81}H(J) + 2P.J.$$

Es stimmt also mit dem oben entwickelten Principe, nach welchem D eine Covariante sein muss.

§. 4.

Die Invarianten A_0 und A_1, welche nebst D in der Resultante von zwei Formen zweiter und dritter Ordnung vorkommen, liefern nach dem obigen Principe Covarianten des Systems dreier cubischen Formen. Was zunächst A_0 betrifft, so ist bekanntlich, wenn f_1 und φ zwei Formen resp. von der dritten und zweiten Ordnung sind,

$$f_1 = a_0 x^3 + 3a_1 x^2 y + 3a_2 x y^2 + a_3 y^3 = a_x^3 = b_x^3$$
$$\varphi = \alpha_0 x^2 + 2\alpha_1 x\, y + \alpha_2 y^2 = \alpha_x^2 = \beta_x^2$$
$$A_0 = (ab)^2(a\alpha)\ (b\alpha)$$
$$= \alpha_0(a_1 a_3 - a_2^2) - \alpha_1(a_0 a_3 - a_1 a_2) + \alpha_2(a_0 a_2 - a_1^2).$$

Und wenn wir die Formen ohne Binomialcoëfficienten schreiben, wie wir es fast überall in dieser Untersuchung thun, so ist

$$9A_0 = \alpha_0(3a_1 a_3 - a_2^2) - \tfrac{1}{2}\alpha_1(9a_0 a_3 - a_1 a_2) + \alpha_2(3a_0 a_2 - a_1^2).$$

Setzt man an Stelle der α resp. die Coëfficienten der Formen

$$X_1 = \frac{f_2(x) f_3(y) - f_2(y) f_3(x)}{y - x}$$

$$X_2 = \frac{f_1(x) f_3(y) - f_1(y) f_3(x)}{y - x}$$

$$X_3 = \frac{f_1(x) f_2(y) - f_1(y) f_2(x)}{y - x},$$

so erhält man simultane Covarianten der drei cubischen Formen, für die wir, da sie die zweiten Überschiebungen der X_i über die Hesse'sche Determinante von f_1 sind, die Bezeichnungen $(X_1 H_1)^2$, $(X_2 H_1)^2$, $(X_3 H_1)^2$ wählen. Entwickelt sind sie

$$\begin{aligned}(X_1 H_1)^2 = &\{(3a_1 a_3 - a_2^2)(c_1 b_0 - c_0 b_1) - \tfrac{1}{2}(9a_0 a_3 - a_1 a_2)(c_2 b_0 - c_0 b_2) + \\ &+ (3a_0 a_2 - a_1^2)(c_3 b_0 - c_0 b_3)\} x^2 \\ &+ \{(3a_1 a_3 - a_2^2)(c_2 b_0 - c_0 b_2) - \tfrac{1}{2}(9a_0 a_3 - a_1 a_2)[(c_3 b_0 - c_0 b_3) + \\ &+ (c_2 b_1 - c_1 b_2)] + (3a_0 a_2 - a_1^2)(c_3 b_1 - c_1 b_3)\} x \\ &+ \{(3a_1 a_3 - a_2^2)(c_3 b_0 - c_0 b_3) - \tfrac{1}{2}(9a_0 a_3 - a_1 a_2)(c_3 b_1 - c_1 b_3) + \\ &+ (3a_0 a_2 - a_1^2)(c_3 b_2 - c_2 b_3)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(X_2 H_1)^2 = &\{(3a_1 a_3 - a_2^2)(c_1 a_0 - c_0 a_1) - \tfrac{1}{2}(9a_0 a_3 - a_1 a_2)(c_2 a_0 - c_0 a_2) + \\ &+ (3a_0 a_2 - a_1^2)(c_3 a_0 - c_0 a_3)\} x^2 \\ &+ \{(3a_1 a_3 - a_2^2)(c_2 a_0 - c_0 a_2) - \tfrac{1}{2}(9a_0 a_3 - a_1 a_2)[(c_3 a_0 - c_0 a_3) + \\ &+ (c_2 a_1 - c_1 a_2)] + (3a_0 a_2 - a_1^2)(c_3 a_1 - c_1 a_3)\} x \\ &+ \{(3a_1 a_3 - a_2^2)(c_3 b_0 - c_0 a_3) - \tfrac{1}{2}(9a_0 a_3 - a_1 a_2)(c_3 a_1 - c_1 a_3) + \\ &+ (3a_0 a_2 - a_1^2)(c_3 a_2 - c_2 a_3)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(X_3 H_1)^2 = &\{(3a_1 a_3 - a_2^2)(a_1 b_0 - a_0 b_1) - \tfrac{1}{2}(9a_0 a_3 - a_1 a_2)(a_2 b_0 - a_0 b_2) + \\ &+ (3a_0 a_2 - a_1^2)(a_3 b_0 - a_0 b_3)\} x^2 \\ &+ \{(3a_1 a_3 - a_2^2)(a_2 b_0 - a_0 b_2) - \tfrac{1}{2}(9a_0 a_3 - a_1 a_2)[(a_3 b_0 - a_0 b_3) + \\ &+ (a_2 b_1 - a_1 b_2)] + (3a_0 a_2 - a_1^2)(a_3 b_1 - a_1 b_3)\} x \\ &+ \{(3a_1 a_3 - a_2^2)(a_3 b_3 - a_0 b_3) - \tfrac{1}{2}(9a_0 a_3 - a_1 a_2)(a_3 b_1 - a_1 b_3) + \\ &+ (3a_0 a_2 - a_1^2)(a_3 b_2 - a_2 b_3)\}.\end{aligned}$$

Überschiebt man die Hesse'sche Covariante der Form f_2 über die Formen X_1, X_2 und X_3, so erhält man folgende drei Covarianten:

$$\begin{aligned}(X_1 H_2)^2 = &\{(3b_1 b_3 - b_2^2)(c_1 b_0 - c_0 b_1) - \tfrac{1}{2}(9b_0 b_3 - b_1 b_2)(c_2 b_0 - c_0 b_2) + \\ &+ (3b_0 b_2 - b_1^2)(c_3 b_0 - c_0 b_3)\} x^2 \\ &+ \{(3b_1 b_3 - b_2^2)(c_2 b_0 - c_0 b_2) - \tfrac{1}{2}(9b_0 b_3 - b_1 b_2)[(c_3 b_0 - c_0 b_3) + \\ &+ (c_2 b_1 - c_1 b_2)] + (3b_0 b_2 - b_1^2)(c_3 b_1 - c_1 b_3)\} x \\ &+ \{(3b_1 b_3 - b_2^2)(c_3 b_0 - c_0 b_3) - \tfrac{1}{2}(9b_0 b_3 - b_1 b_2)(c_3 b_1 - c_1 b_3) + \\ &+ (3b_0 b_2 - b_1^2)(c_3 b_2 - c_2 b_3)\}\end{aligned}$$

$$(X_2 H_2)^2 = \{(3 b_1 b_3 - b_2^2)\ (c_1 a_0 - c_0 a_1) - \tfrac{1}{2}(9 b_0 b_3 - b_1 b_2)\ (c_2 a_0 - c_0 a_2) +$$
$$+ (3 b_0 b_2 - b_1^2)\ (c_3 a_0 - c_0 a_3)\} x^2$$
$$+ \{(3 b_1 b_3 - b_2^2)\ (c_2 a_0 - c_0 a_2) - \tfrac{1}{2}(9 b_0 b_3 - b_1 b_2)[(c_3 a_0 - c_0 a_3) +$$
$$+ (c_2 a_1 - c_1 a_2)] + (3 b_0 b_2 - b_1^2)\ (c_3 a_1 - c_1 a_3)\} x$$
$$+ \{(3 b_0 b_3 - b_2^2)\ (c_3 a_0 - c_0 a_3) - \tfrac{1}{2}(9 b_0 b_3 - b_1 b_2)\ (c_3 a_1 - c_1 a_3) +$$
$$+ (3 b_0 b_2 - b_1^2)\ (c_3 a_2 - c_2 a_3)\}$$

$$(X_3 H_2)^2 = \{(3 b_1 b_3 - b_2^2)\ (a_1 b_0 - a_0 b_1) - \tfrac{1}{2}(9 b_0 b_3 - b_1 b_2)\ (a_2 b_0 - a_0 b_2) +$$
$$+ (3 b_0 b_2 - b_1^2)\ (a_3 b_0 - a_0 b_3)\} x^2$$
$$+ \{(3 b_1 b_3 - b_2^2)\ (a_2 b_0 - a_0 b_2) - \tfrac{1}{2}(9 b_0 b_3 - b_1 b_2)[(a_3 b_0 - a_0 b_3) +$$
$$+ (a_2 b_1 - a_1 b_2)] + (3 b_0 b_2 - b_1^2)\ (a_3 b_1 - a_1 b_3)\} x$$
$$+ \{(3 b_1 b_3 - b_2^2)\ (a_3 b_0 - a_0 b_3) - \tfrac{1}{2}(9 b_0 b_3 - b_1 b_2)\ (a_3 b_1 - a_1 b_3) +$$
$$+ (3 b_0 b_2 - b_1^2)\ (a_3 b_2 - a_2 b_3)\}.$$

Ebenso liefern die Überschiebungen der Hesse'schen Covariante von f_3 über die Formen X_1, X_2 und X_3 folgende Covarianten:

$$(X_1 H_3)^2 = \{(3 c_1 c_3 - c_2^2)\ (c_1 b_0 - c_0 b_1) - \tfrac{1}{2}(9 c_0 c_3 - c_1 c_2)\ (c_2 b_0 - c_0 b_2) +$$
$$+ (3 c_0 c_2 - c_1^2)\ (c_3 b_0 - c_0 b_3)\} x^2$$
$$+ \{(3 c_1 c_3 - c_2^2)\ (c_2 b_0 - c_0 b_2) - \tfrac{1}{2}(9 c_0 c_3 - c_1 c_2)[(c_3 b_0 - c_0 b_3) +$$
$$+ (c_2 b_1 - c_1 b_2)] + (3 c_0 c_2 - c_1^2)\ (c_3 b_1 - c_1 b_3)\} x$$
$$+ \{(3 c_1 c_3 - c_2^2)\ (c_3 b_0 - c_0 b_3) - \tfrac{1}{2}(9 c_0 c_3 - c_1 c_2)\ (c_3 b_1 - c_1 b_3) +$$
$$+ (3 c_0 c_2 - c_1^2)\ (c_3 b_2 - c_2 b_3)\}$$

$$(X_2 H_3)^2 = \{(3 c_1 c_3 - c_2^2)\ (c_1 a_0 - c_0 a_1) - \tfrac{1}{2}(9 c_0 c_3 - c_1 c_2)\ (c_2 a_0 - c_0 a_2) +$$
$$+ (3 c_0 c_2 - c_1^2)\ (c_3 a_0 - c_0 a_3)\} x^2$$
$$+ \{(3 c_1 c_3 - c_2^2)\ (c_2 a_0 - c_0 a_2) - \tfrac{1}{2}(9 c_0 c_8 - c_1 c_2)[(c_3 a_0 - c_0 a_3) +$$
$$+ (c_2 a_1 - c_1 a_2)] + (3 c_0 c_2 - c_1^2)\ (c_3 a_1 - c_1 a_3)\} x$$
$$+ \{(3 c_1 c_3 - c_2^2)\ (c_3 a_0 - c_0 a_3) - \tfrac{1}{2}(9 c_0 c_3 - c_1 c_2)\ (c_3 a_1 - c_1 a_3) +$$
$$+ (3 c_0 c_2 - c_1^2)\ (c_3 a_2 - c_2 a_3)\}$$

$$(X_3 H_3)^2 = \{(3 c_1 c_3 - c_2^2)\ (a_1 b_0 - a_0 b_1) - \tfrac{1}{2}(9 c_0 c_3 - c_1 c_2)\ (a_2 b_0 - a_0 b_2) +$$
$$+ (3 c_0 c_2 - c_1^2)\ (a_3 b_0 - a_0 b_3)\} x^2$$
$$+ \{(3 c_1 c_3 - c_2^2)\ (a_2 b_0 - a_0 b_2) - \tfrac{1}{2}(9 c_0 c_3 - c_1 c_2)[(a_3 b_0 - a_0 b_3) +$$
$$+ (a_2 b_1 - a_1 b_2)] + (3 c_0 c_2 - c_1^2)\ (a_3 b_1 - a_1 b_3)\} x$$
$$+ \{(3 c_1 c_3 - c_2^2)\ (a_3 b_0 - a_0 b_3) - \tfrac{1}{2}(9 c_0 c_3 - c_1 c_2)\ (a_3 b_1 - a_1 b_3) +$$
$$+ (3 c_0 c_2 - c_1^2)\ (a_3 b_2 - a_2 b_3)\}.$$

Wir stellen des Folgenden wegen die neun Covarianten in einem Schema zusammen

$$\left.\begin{matrix} (X_1 H_1)^2, & (X_1 H_2)^2, & (X_1 H_3)^2 \\ (X_2 H_1)^2, & (X_2 H_2)^2, & (X_2 H_3)^2 \\ (X_3 H_1)^2, & (X_3 H_2)^2, & (X_3 H_3)^2. \end{matrix}\right\} \quad 1.)$$

§. 5.

Alle im Schema des vorigen Paragraphen enthaltenen Covarianten, mit Ausnahme derjenigen, welche in der Diagonalreihe von links oben nach rechts unten sich befinden, sind Covarianten von zwei cubischen

Formen und müssen sich, da zwei kubische Formen keine solchen Covarianten besitzen, in schon bekannte Formen zerlegen lassen. Dies ist in der That der Fall. Erinnert man sich nämlich an die Ausdrücke für die zweiten Ableitungen der Jacobi'schen Covarianten.

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} = 6(01)^2 x + 6(02) xy + \{3(03) + (12)\} y^2$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x \partial y} = 3(02)^2 x + 2\{3(03) + (12)\} xy + 3(13) y^2$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial y^2} = \{3(03) + (12)\} x^2 + 6(13) xy + 6(23) y^2$$

so kann man dieselben vermöge der Relation

$$3P = 3(03) - (12)$$

woraus

$$(12) = 3(03) - 3P$$

folgt, folgendermassen schreiben:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} = 6(01) x^2 + 6(02) xy + 6(03) y^2 - 3P y^2$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x \partial y} = 3(02) x^1 + 3\{(03) + (12)\} xy + 3(13) y^2 + Pxy$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial y^2} = 6(03) x^2 - 3P x^2 + 6(13) xy + 6(23) y^2.$$

Bildet man nun die zweiten Überschiebungen der Jacobi'schen Covarianten über die Hesse'schen Covarianten, so ergeben sich folgende Formeln:

$$(X_1 H_2)^2 = (J_{23} H_2)^2 - 3PH_2,\ (X_1 H_3)^2 = (J_{23} H_3)^2 - 3PH_3$$
$$(X_2 H_1)^2 = (J_{13} H_1)^2 - 3PH_1,\ (X_2 H_3)^2 = (J_{13} H_3)^2 - 3PH_3$$
$$(X_3 H_1)^2 = (J_{12} H_1)^2 - 3PH_1,\ (X_3 H_2)^2 = (J_{12} H_2)^2 - 3PH_2.$$

Die Determinante von je dreien dieser neun Covarianten bildet eine Invariante 12ten Grades, so dass wir 84 solche simultaner Invarianten besitzen, von denen die folgenden drei sich in niedere Invarianten zerlegen lassen. Bezeichnen wir die Coëfficienten von H_1, H_2, H_3 resp. mit

$$\begin{matrix} A_0, & A_1, & A_2 \\ B_1, & B_2, & B_3 \\ C_1, & C_2, & C_3 \end{matrix}$$

so lauten die Determinanten der in den Horizontalreihen stehenden Formen

$$D_1 = \begin{vmatrix} A_2(10)_{23} - \frac{1}{2}A_1(20)_{23} + A_0(30)_{23}, & A_2(20)_{23} - \frac{1}{2}A_1[(30)_{23} + (12)_{23}] + A_0(31)_{23}, & A_2(30)_{23} - \frac{1}{2}A_1(31)_{23} + A_0(32)_{23} \\ B_2(10)_{23} - \frac{1}{2}B_1(20)_{23} + B_0(30)_{23}, & B_2(20)_{23} - \frac{1}{2}B_1[(30)_{23} + (12)_{23}] + B_0(31)_{23}, & B_2(30)_{23} - \frac{1}{2}B_1(31)_{23} + B_0(32)_{23} \\ C_2(10)_{23} - \frac{1}{2}C_1(20)_{23} + C_0(30)_{23}, & C_2(20)_{23} - \frac{1}{2}C_1[(30)_{23} + (12)_{23}] + C_0(31)_{23}, & C_2(30)_{23} - \frac{1}{2}C_1(31)_{23} + C_0(32)_{23} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} A_2(10)_{13} - \frac{1}{2}A_1(20)_{13} + A_0(30)_{13}, & A_2(20)_{13} - \frac{1}{2}A_1[(30)_{13} + (21)_{13}] + A_0(31)_{13}, & A_2(30)_{13} - \frac{1}{2}\ (31)_{13} + A_0(32)_{13} \\ B_2(10)_{13} - \frac{1}{2}B_1(20)_{13} + B_0(30)_{13}, & B_2(20)_{13} - \frac{1}{2}B_1[(30)_{13} + (21)_{13}] + B_0(31)_{13}, & B_2(30)_{13} - \frac{1}{2}\ (31)_{13} + B_0(32)_{13} \\ C_2(10)_{13} - \frac{1}{2}C_1(20)_{13} + C_0(30)_{13}, & C_2(20)_{13} - \frac{1}{2}C_1[(30)_{13} + (21)_{13}] + C_0(31)_{13}, & C_2(30)_{13} - \frac{1}{2}C_1(31)_{13} + C_0(32)_{13} \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} A_2(10)_{12} - \frac{1}{2}A_1(20)_{12} + A_0(30)_{122}, & A_2(20)_{1} - \frac{1}{2}A_1[(30)_{12} + (21)_{12}] + A_0(31)_{12}, & A_2(30)_{12} - \frac{1}{2}\ (31)_{12} + A_0(32)_{12} \\ B_2(10)_{12} - \frac{1}{2}B_1(20)_{12} + B_0(30)_{12}, & B_2(20)_{12} - \frac{1}{2}B_1[(30)_{12} + (21)_{12}] + B_0(31)_{12}, & B_2(30)_{12} - \frac{1}{2}\ (31)_{12} + B_0(32)_{12} \\ C_2(10)_{12} - \frac{1}{2}C_1(20)_{12} + C_0(30)_{12}, & C_2(20)_{12} - \frac{1}{2}C_1[(30)_{12} + (21)_{12}] + C_0(31)_{12}, & C_2(30)_{12} - \frac{1}{2}\ (31)_{12} + C_0(32)_{12} \end{vmatrix}$$

Diese Determinanten lassen sich offenbar folgendermassen zerlegen:

$$D_1 = \begin{vmatrix} (a_1 a_3 - a_2^2), & (a_0 a_3 - a_1 a_2), & (a_0 a_2 - a_1^2) \\ (b_1 b_3 - b_2^2), & (b_0 b_3 - b_1 b_2), & (b_0 b_2 - b_1^2) \\ (c_1 c_3 - c_2^2), & (c_0 c_3 - c_1 c_2), & (c_0 c_2 - c_1^2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (10)_{23} & -\frac{1}{2}(20)_{23} & , (30)_{23} \\ (20)_{23} & -\frac{1}{2}[(30)_{23} + (21)_{23}, & (31)_{23} \\ (30)_{23} & -\frac{1}{2}(31)_{23} & , (32)_{23} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} (a_1 a_3 - a_2^2), & (a_0 a_3 - a_1 a_2), & (a_0 a_2 - a_1^2) \\ (b_1 b_3 - b_2^2), & (b_0 b_3 - b_1 b_2), & (b_0 b_2 - b_1^2) \\ (c_1 c_3 - c_2^2), & (c_0 c_3 - c_1 c_2), & (c_0 c_2 - c_1^2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (10)_{13} & -\frac{1}{2}(20)_{13} & , (30)_{13} \\ (20)_{13} & -\frac{1}{2}[(30)_{13} + (21)_{13}, & (31)_{13} \\ (30)_{13} & -\frac{1}{2}(31)_{13} & , (32)_{13} \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} (a^2 a_3 - a_2^2), & (a_0 a_3 - a_1 a_2), & (a_0 a_2 - a_1^2) \\ (b_1 b_3 - b_2^2), & (b_0 b_3 - b_1 b_2), & (b_0 b_2 - b_1^2) \\ (c_1 c_3 - c_2^2), & (c_0 c_3 - c_1 c_2), & (c_0 c_2 - c_1^2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (10)_{12} & -\frac{1}{2}(20)_{12} & , (30)_{12} \\ (20)_{12} & -\frac{1}{2}[(30)_{12} + (21)_{12}, & (31)_{12} \\ (30)_{12} & -\frac{1}{2}(31)_{12} & , (32)_{12} \end{vmatrix},$$

wo der erste allen gemeinschaftliche Factor die aus den drei Hesse'schen Covarianten gebildete Determinante ist und die zweiten Factoren die Resultanten $R(f_2 f_3)$, $R(f_1 f_3)$ und $R(f_1 f_2)$ sind.

Ob sich nicht einige von den übrigen 81 Invarianten 12ten Grades in niedere Invarianten zerlegen lassen konnte ich bis jetzt nicht ermitteln.

§. 6.

Setzt man

$$X_1 = \varphi_1(x) y^2 + \varphi_2(x) y + \varphi_3(x)$$
$$X_2 = \psi_1(x) y^2 + \psi_2(x) y + \psi_3(x)$$
$$X_3 = \chi_1(x) y^2 + \chi_2(x) y + \chi_3(x)$$

so ist die Determinante

$$\pi = \begin{vmatrix} \varphi_1(x), & \varphi_2(x), & \varphi_3(x) \\ \psi_1(x), & \psi_2(x), & \psi_3(x) \\ \chi_1(x), & \chi_2(x), & \chi_3(x) \end{vmatrix}$$

eine Form 6ter Ordnung und 6ten Grades. Es soll nun bewiesen werden, dass π eine Covariante des Systems der drei cubischen Formen ist. Wir bilden zu diesem Zwecke die Determinante der 6 quadratischen Covarianten

$$C_{12,6} = \begin{vmatrix} (X_1 H_1)^2, & (X_2 H_1)^2, & (X_3 H_1)^2 \\ (X_1 H_2)^2, & (X_2 H_2)^2, & (X_3 H_2)^2 \\ (X_1 H_3)^2, & (X_2 H_3)^2, & (X_3 H_3)^2 \end{vmatrix}$$

welche offenbar eine Covariante ist. Nach dem Multiplicationsgesetz der Determinanten ist aber

$$\begin{vmatrix} (X_1 H_1)^2, & (X_2 H_1)^2, & (X_3 H_1)^2 \\ (X_1 H_2)^2, & (X_2 H_2)^2, & (X_3 H_2)^2 \\ (X_1 H_3)^2, & (X_2 H_3)^2, & (X_3 H_3)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_1 a_3 - a_2^2), & (a_0 a_3 - a_1 a_2), & (a_0 a_2 - a_1^2) \\ (b_1 b_3 - b_2^2), & (b_0 b_3 - b_1 b_2), & (b_0 b_2 - b_1^2) \\ (c_1 c_3 - c_2^2), & (c_0 c_3 - c_1 c_2), & (c_0 c_2 - c_1^2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_1(x) \varphi_2(x) \varphi_3(x) \\ \psi_1(x) \psi_2(x) \psi_3(x) \\ \chi_1(x) \chi_2(x) \chi_3(x) \end{vmatrix},$$

daraus folgt, dass π eine Covariante des Systems ist.

Bildet man die Invarianten A_1 für die folgenden Systeme von je zwei Formen

$$\left.\begin{matrix} X_1, f_1; & X_1, f_2; & X_1 f_3 \\ X_2 . f_1; & X_2, f_2; & X_2 f_3 \\ X_3, f_1; & X_3, f_2; & X_3 f_3, \end{matrix}\right\} I$$

so erhält man neun Covarianten von der 6ten Ordnung und 8ten Grades, von denen wir eine ausgerechnet angeben wollen:

$$x_1^6 \times$$

$$a_0^2(30)^3-6\,a_0\,a_1\,(30)^2(20)+(a_1^2+2\,a_0\,a_2)(30)^2(10)+(a_2^2+2\,a_1\,a_3)\,(10)^2\,(30)-$$
$$2\,(a_0\,a_3+5\,a_1\,a_2)(10)(30)(20)-8\,a_1\,a_2\,(21)^3+4\,(a_1\,a_3+2a_2^2)(10)\,(20)^2-$$
$$6\,a_2\,a_3(20)(10)^2+4\,(a_0\,a_2+2\,a_1^2)\,(30)(20)^2+a_3^2\,(10)^3$$

$$x_1^5 x_2 \times$$

$$3\,a_0^2(30)^2(31)-6\,a_0\,a_1\,\{(30)^3+(30)^2(21)+2(30)(31)(20)\}+$$
$$(a_1^2+2a_0\,a_2\,(\{(30)_2\,(20)+2(30)(31)(10)\}+(a_2^2+2\,a_1\,a_3)\,\{(10)^2(31)+2\,(10)\,(20)\,(30)\}-$$
$$2\,(a_0\,a_3+5\,a_1\,a_2)\{(30)(20)^2+(31)(10)(20)+(30)^2(10)+(30)(10)(21)\}-$$
$$24\,a_1\,a_2\,\{(20)^2(30)+(20)^2(21)\}+4\,(a_1\,a_3+2\,a_2^2)\{(20)^3+2\,(10)(20)\,(30)+2(10)(20)\,(21)\}-$$
$$6a_2a_3\,\{(10)^2(30)+(10)^2(21)+2(20)^2(10)\}+4(a_0a_2+2a_1^2)\,\{(20)^2(31)+2(30)^2(20)+2(30)(20)\,(21)\}+$$
$$3\,a_3^2(10)^2(20)$$

$$x_1^4 x_2^2 \times$$

$$3\,a_0^2\{(30)\,(31)^2+(30)^2\,(32)\}-6\,a_0\,a_1\,\{(31)^2\,(20)+2\,(30)\,(32)\,(20)+3\,(30)^2\,(31)+2\,(30)\,(31)\,(21)\}+$$
$$(a_1^2+2\,a_0\,a_2)\,\{2\,(30)\,(32)\,(10)+2\,(30)\,(31)\,(20)+(30)^3+(31)^3\,(10)\}+$$
$$(a_2^2+2\,a_1\,a_3)\,\{(20)^2(30)+2\,(10)\,(30)^2+2\,(10)\,(20)\,(31)+(10)^2\,(32)\}$$
$$-2\,(a_0\,a_3+5a_1\,a_2)\,\{(31)(20)^2+2(30)^2(20)+(32)\,(10)\,(20)+2(31)(10)(30)+(31)\,(10)\,(21)+(30)\,(20)\,(21)$$
$$-24\,a_1\,a_2\,\{(20)\,(30)^2+2(20)(30)\,(21)+(20)\,(21)^2+(20^2\,(31)\}$$
$$+4(a_1\,a_3+2\,a_2^2)\,\{(10)\,(30)^2+2\,(10)\,(30)\,(21)+(10)\,(21)^2+2\,(20)^2(30)+2\,(20)^2(21)+(30)\,(20)^2$$
$$+2\,(10)\,(20)\,(31)\}-6\,a_2\,a_3\,\{(20)^3+4\,(20)\,(10)\,(30)+2(20)\,(10)\,(21)$$
$$+(31)\,(10)^2\}+4\,(a_0\,a_2+2\,a_1^2)\,\{(30)^3+2\,(30)^2(21)+(30)\,(21)^2+$$
$$+(31)\,(20)\,(21)+(32)\,(20)^2+4'(30)\,(20)\,(31)\}+3\,a_3^2\,\{(10)\,(20)^2+(10)^2\,(30)\}$$

$$x_1^3 x_2^3 \times$$

$$a_0^2\{(31)^3+6\,(30)\,(31)\,(32)-6\,a_0\,a_1\,\{2\,(31)\,(32)\,(20)+2\,(30)^3\,(32)+(30)\,(31)^2+2\,(30)(32)(21)$$
$$+(21)(31)^2+2\,(30)\,(31)^2\}+(a_1^2+2\,a_0\,a_2)\,\{2\,(31)\,(32)\,(10)+(31)^2\,(20)+2\,(30)\,(32)\,(20)$$
$$+2(30)^2(31)\}+(a_2^2+2\,a_1\,a_3)\,\{2\,(20)\,(30)^2+2\,(10)(20)\,(31)+(20)^2(31)+2\,(10)\,(20)\,(32)\}$$
$$-2\,(a_0\,a_3+5\,a_1\,a_2)\,\{(32)(20)^2+(30)^3+(30)^2\,(21)+(32)\,(10)\,(30)+(32)\,(10)\,(21)$$
$$+2\,(31)\,(30)\,(20)+(31)^2\,(10)+(31)\,(20)\,(21)\}$$
$$-8\,a_1\,a_2\,\{(30)^3+3\,(30)^2(21)+3\,(30)\,(21)^2+(21)^3+6\,(20)\,(31)\,(30)+6\,(20)\,(31)\,(21)\}$$
$$+4\,(a_1\,a_3+2\,a_2^2)\,\{2\,(10)\,(31)\,(30)+2\,(10)\,(31)\,(21)+4(20)\,(30)\,(21)+(20)\,(21)^2$$
$$+2\,(20)^2(31)+2\,(20)^2\,(31)+3\,(20)\,(30)^2\}-6\,a_2\,a_3\,\{3\,(20)^2(30)+(20)^2(21)+$$
$$2\,(10)\,(30)^2+2\,(10)\,(30)\,(21)+2\,(31)\,(10)\,(20)\}+4\,(a_0\,a_2+2\,a_1^2)\,\{2\,(30)^2(31)+2\,(30)\,(31)\,(21)$$
$$+(32)\,(20)\,(30)+(32)\,(20)\,(21)+(31)\,(30)^2+2\,(31)\,(30)\,(21)+(31)\,(21)^2+2\,(31)^2(20)^2\}$$
$$a_3^2\,\{(20)^3+6\,(10)\,(20)\,(30)\}$$

$$x_1^2 x_2^4 \times$$

$$3\,a_0^2\{(30)\,(32)^2+(31)^2\,(32)-6\,a_0\,a_1\,\{(32)^2\,(20)+4\,(30)\,(31)\,(32)+2\,(31)\,(32)\,(21)$$
$$+(31)^3\}+(a_1^2+2\,a_0\,a_2)\,\{(32)^2(10)+2\,(31)\,(32)\,(20)+2\,(30)^2\,(32)+(31)^2(30)\}+$$
$$(a_2^2+2\,a_1\,a_3)\,\{(30)^3+(20)^2(32)+2\,(20)\,(30)\,(31)+2\,(10)\,(30)\,(32)\}$$
$$-2(a_0\,a_3+5\,a_1\,a_2)\,\{2\,(32)\,(30)\,(20)+(32)\,(20)\,(21)+(31)\,(30)^2+(31)\,(30)\,(21)+(32)\,(10)\,(31)$$
$$(31)^2(20)+(30)^2(31)\}-24\,a_1\,a_2\,\{(20)\,(31)^2+(31)\,(30)^2+2\,(31)\,(30)\,(21)+(31)\,(21)^2\}$$

$$+4(a_1a_3+2a_2^2)\{(10)(31)^2+(30)^3+2(30)^2(21)+(30)(21)^2+4(20)(31)(30)+2(20)(31)(21)\}$$
$$-6a_2a_3\{(20)^2(31)+3(30)^2(20)+2(30)(20)(21)+2(31)(10)(30)\}$$
$$+4(a_0a_2+2a_1^2)\{3(31)^2(30)+2(31)^2(21)+(32)(30)^2+2(32)(30)(21)+(32)(21)^2$$
$$2(32)(20)(31)\}+3a_3^2\{(10)(30)^2+(20)^2(30)\}$$

$$x_1x_2^5\times$$

$$+3a_0^2(31)(32)^2-6a_0a_1\{(31)^2(32)+(32)^2(30)+(32)^2(21)\}$$
$$(a_1^2+2a_0a_2)\{(32)^2(20)+2(30)(31)(32)\}+(a_2^2+2a_1a_3)\{(30)^2(31)+2(20)(30)(32)\}$$
$$-2(a_0a_3+5a_1a_2)\{(32)(30)^2+(32)(30)(21)+(32)(20)(31)+(31)^2(30)\}$$
$$24a_1a_2\{(31)^2(30)+(31)^2(21)\}+4(a_1a_3+2a_2^2)\{(20)(31)^2+2(30)^2(31)+2(30)(31)((21)\}$$
$$-6a_2a_3\{(30)^3+(30)^2(21)+(31)(30)(20)\}+4(a_0a_2+2a_1^2)\{(31)^3+2(32)(31)(30)+$$
$$2(32)(31)(21)\}+3a_3^2(30)^2(20)$$

$$x_2^6\times$$

$$a_0^2(32)^3-6a_0a_1(32)^2(31)+(a_1^2+2a_0a_2)(32)^2(30)+(a_2^2+2a_1a_3)(30)^2(32)$$
$$-2(a_0a_3+5a_1a_2)(32)(30)(31)-8a_1a_2(31)^3+4(a_1a_3+2a_2^2)(31)^2(30)$$
$$-6a_2a_3(30)^2(31)+4(a_0a_2+2a_1^2)(31)^2(32)+a_3^2(30)^3.—$$

Es ist evident, dass alle Covarianten dieser Art, mit Ausnahme derjenigen, welche aus den Paaren von Formen, die in der Diagonale des Schemas 1 sich befinden, gebildet sind, sich auf niedere Covarianten zurückziehen lassen, da bekanntlich für zwei cubische Formen keine solche Covarianten existiren. Indess ist mir die wirkliche Zerlegung dieser Covarianten bis jetzt nicht gelungen.

§. 7.

Wenn f_1, f_2, f_3 drei cubische Formen in homogener Form sind, also

$$f_1=a_0x_1^3+3a_1x_1^2x_2+3a_2x_{1\,2}^{\;2}+a_3x_2^3$$
$$f_2=b_0x_1^3+3b_1x_1^2x_2+3b_2x_{1\,2}^{\;2}+b_3x_2^3$$
$$f_3=c_0x_1^3+3c_1x_1^2x_2+3c_2x_{1\,2}^{\;2}+c_3x_2^3$$

und man die drei Jacobi'schen Covarianten bildet:

$$J(f_1f_2)=\begin{vmatrix} a_0x_1^2+2a_1x_1x_2+a_2x_2^2, & a_1x_1^2+2a^2x_1x_2+a_3x_2^2 \\ b_0x_1^2+2b_1x_1x_2+b_2x_2^2, & b_1x_1^2+2b_2x_1x_2+b_3x_2^2 \end{vmatrix}$$

$$J(f_1f_3)=\begin{vmatrix} a_0x_1^2+2a_1x_1x_2+a_2x_2^2, & a_1x_1^2+2a_2x_1x_2+a_3x_2^2 \\ c_0x_1^2+2c_1x_1x_2+c_2x_2^2, & c_1x_1^2+2c_2x_1x_2+c_3x_2^2 \end{vmatrix}$$

$$J(f_2f_3)=\begin{vmatrix} b_0x_1^2+2b_1x_1x_2+b_2x_2^2, & b_1x_1^2+2b_2x_1x_2+b_3x_2^2 \\ c_0x_1^2+2c_1x_1x_2+c_2x_2^2, & c_1x_1^2+2c_2x\,x_2+c_3x_2^2 \end{vmatrix}$$

und von diesen wiederum die Jacobi'schen Covarianten

$$\psi_1=\begin{vmatrix} \frac{\partial J(f_1f_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial J(f_1f_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial J(f_1f_3)}{\partial x_1} & \frac{\partial J(f_1f_3)}{\partial x_2} \end{vmatrix},\quad \psi_2=\begin{vmatrix} \frac{\partial J(f_1f_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial J(f_1f_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial J(f_2f_3)}{\partial x_1} & \frac{\partial J(f_2f_3)}{\partial x_2} \end{vmatrix},\quad \psi_3=\begin{vmatrix} \frac{\partial J(f_1f_3)}{\partial x_1} & \frac{\partial J(f_1f_3)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial J(f_2f_3)}{\partial x_1} & \frac{\partial J(f_2f_3)}{\partial x_2} \end{vmatrix},$$

so ist nach einem bekannten Satze

$$\psi_1 = M.f_1$$
$$\psi_2 = M.f_2$$
$$\psi_3 = M.f_3,$$

wo M eine Combinante der drei cubischen Formen ist und folgende Gestalt hat

$$M = \begin{vmatrix} a_0 x_1 + a_1 x_2, & a_1 x_1 + a_2 x_2, & a_2 x_1 + a_3 x_2 \\ b_0 x_1 + b_1 x_2, & b_1 x_1 + b_2 x_2, & b_2 x_1 + b_3 x_2 \\ c_0 x_1 + c_1 x_2, & c_1 x_1 + c_2 x_2, & c_2 x_1 + c_3 x_2 \end{vmatrix}.$$

Wendet man auf diese Form die bei der Canoniziante der Form 5ter Ordnung angewendete Methode an, so erhält man für M die interessante Form

$$M = \begin{vmatrix} x_2^3, & -x_2^2 x_1, & x_2 x_1^2, & -x_1^3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Die Identität dieser Form mit der vorigen ergibt sich sehr leicht durch das Multiplicationsgesetz der Determinanten. Man hat nämlich

$$\begin{vmatrix} x_2^3, & -x_2^2 x_1, & x_2 x_1^2, & -x_1^3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0, & a_0 x_1 + a_1 x_2, & a_1 x_1 + a_2 x_2, & a_2 x_1 + a_3 x_2 \\ 0, & b_0 x_1 + b_1 x_2, & b_1 x_1 + b_2 x_2, & b_2 x_1 + b_3 x_2 \\ 0, & c_0 x_1 + c_1 x_2, & c_1 x_1 + c_2 x_2, & c_2 x_1 + c_3 x_2 \end{vmatrix}$$

und, wenn man beiderseits durch x_2^3 dividirt, die fragliche Identität.

In Folge eines bekannten Satzes, nach welchen die Jacobi'schen Covarianten, wenn f_1, f_2 und f_3 für einen und denselben Werth verschwinden, diesen Werth zur Doppelwurzel haben, muss auch M für diesen Werth verschwinden. Es muss daher in diesem Falle die Determinante

$$R = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 \\ b_0 & 3b_1 & 3b_2 & b_3 \\ c_0 & 3c_1 & 3c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

wo A_0, A_1, A_2, A_3 die Coëfficienten der Form M sind, identisch verschwinden. Ich will nun nachweisen, dass diese Determinante immer verschwindet, d. h. dass zwischen der Form M und den Formen f_1, f_2, f_3 die Identität besteht:

$$\lambda_0 M + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0,$$

wo

$$\lambda_0 = 9\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \ \lambda_1 = -\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 3b_1 & 3b_2 & b_3 \\ 3c_1 & 3c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \ \lambda_2 = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 3a_1 & 3a_2 & a_3 \\ 3c_1 & 3c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \ \lambda_3 = -\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 3a_1 & 3a_2 & a_3 \\ 3b_1 & 3b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Es ist nämlich, wie eine kleine Rechnung zeigt,

$$-\lambda_1 f_1 - \lambda_2 f_2 - \lambda_3 f_3$$

$$= \{3 A_1 [(b_2 c_3 - b_3 c_2) a_1 - (a_2 c_3 - a_3 c_2) b_0 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_0] - 3 A_2 [(b_1 c_3 - b_3 c_1) a_0 - (a_1 c_3 - a_3 c_1) b_0 + (a_1 b_3 - a_3 b_1) c_0]$$

$$+ 9 A_3 [(b_1 c_2 - b_2 c_1) a_0 - (a_1 c_2 - a_2 c_1) b_0 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_0]\} x_1^3$$

$$+ \{9 A_1 [(b_2 c_3 - b_3 c_2) a_1 - (a_2 c_3 - a_3 c_2) b_1 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1] 9 - A_2 [(b_1 c_3 - b_3 c_1) a_1 - (a_1 c_3 - a_3 c_1) b_1 + (a_1 b_3 - a_3 b_1) c_1]$$

$$+ 27 A_3 [(b_1 c_2 - b_2 c_1) a_1 - (a_1 c_2 - a_2 c_1) b_1 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_1]\} x_1^2 x_2$$

$$+ \{9 A_1 [(b_2 c_3 - b_3 c_2) a_2 - (a_2 c_3 - a_3 c_2) b_2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_2] - A_2 [(b_1 c_3 - b_3 c_1) a_2 - (a_1 c_3 - a_3 c_1) b_2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1) c_2]$$

$$27 A_1 [(b_1 c_2 - b_2 c_1) a_2 - (a_1 c_2 - a_2 c_1) b_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_2]\} x_1 x_2^2 +$$

$$\{3 A_1 [(b_2 c_3 - b_3 c_2) a_3 - (a_2 c_3 - a_3 c_2) b_3 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_3] - A_2 [(b_1 c_3 - b_3 c_1) a_3 - (a_1 c_3 - a_3 c_1) b_3 + (a_1 b_3 - a_3 b_1) c_3]$$

$$+ \{9 A_3 [(b_1 c_2 - b_2 c_1) a_3 - (a_1 c_2 - a_2 c_1) b_3 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3]\} x_2^3$$

$$= 9 A_3 A_0 x_1^3 + 9 A_1 A_3 x_1^2 x_2 + 9 A_2 A_3 x_1 x_2^2 + 9 A_3 A_3 x_2^3$$

$$= A_3 M.$$

§. 8.

Es ist bekannt, dass, wenn $f_1 + \lambda_1 f_2$ einen vollständigen Cubus eines linearen Ausdrucks darstellt, dieser in der Jacobi'schen Covariante quadratisch vorkommt. Die Bedingung dafür ist bekanntlich das Verschwinden der Invariante

$$S_1 = \begin{vmatrix} a_0 a_1 b_0 \\ a_1 a_2 b_1 \\ a_2 a_3 b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_0 b_1 a_1 \\ b_1 b_2 a_2 \\ b_2 b_3 a_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 a_1 b_1 \\ a_1 a_2 b_2 \\ a_2 a_3 b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_0 b_1 a_0 \\ b_1 b_2 a_1 \\ b_2 b_3 a_2 \end{vmatrix}.$$

Wenn nun auch

$$f_1 + \lambda_2 f_3$$

ein Cubus sein soll, so muss auch die Invariante verschwinden;

$$S_2 = \begin{vmatrix} a_0 a_1 c_0 \\ a_1 a_2 c_1 \\ a_2 a_3 c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_0 c_1 a_1 \\ c_1 c_2 a_2 \\ c_2 c_3 a_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 a_2 c_2 \\ a_1 a_2 c_2 \\ a_2 a_3 c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_0 c_1 a_0 \\ c_1 c_2 a_1 \\ c_2 c_3 a_2 \end{vmatrix}.$$

Stellen

$$f_1 + \lambda_1 f_2 \text{ und } f_1 + \lambda_2 f_3$$

denselben Cubus dar, so stellt auch

$$f_2 + \lambda_3 f_3$$

denselben Cubus dar, denn ist

$$f_1 + \lambda_1 f_2 = A(x - \alpha)^3$$
$$f_1 + \lambda_2 f_3 = B(x - \alpha)^3,$$

so folgt durch Subtraction

$$\lambda_1 f_2 - \lambda_2 f_3 = f_2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} f_3 = \frac{(A-B)}{\lambda_1} (x - \alpha)^3.$$

Um die Bedingung zu finden, unter welcher

$$f_1 + \lambda_1 f_2$$
$$f_2 + \lambda_2 f_3$$
$$f_2 + \lambda_3 f_3$$

den Cubus desselben linearen Ausdruckes darstellen, setzen wir wiederum

$$f_1 + \lambda_1 f_2 = A(x - \alpha)^3$$
$$f_1 + \lambda_2 f_3 = B(x - \alpha)^3.$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit B und die zweite mit A und subtrahirt, so folgt

$$\begin{aligned} & B(f_1+\lambda_1 f_2)-A(f_1+\lambda_2 f_3) \\ & =(B-A)f_1+B\lambda_1 f_2-A\lambda_2 f_3=0. \end{aligned}$$

Setzt man

$$B-A=A,\ B\lambda_1=B,\ -A\lambda_2=\Gamma$$

so folgt, dass in diesem Falle eine lineare Relation zwischen den drei Formen bestehen muss,

$$A f_1+B f_2+\Gamma f_3=0.$$

Aus dieser Relation folgen folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_0 A+b_0 B+c_0\Gamma &= 0 \\ a_1 A+b_1 B+c_1\Gamma &= 0 \\ a_2 A+b_2 B+c_2\Gamma &= 0 \\ a_3 A+b_3 B+c_3\Gamma &= 0, \end{aligned}$$

d. h., in diesem Falle müssen alle Determinanten des Rechteckes

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

verschwinden.

Beachtet man, dass diese Determinanten die Coëfficienten der Combinante M sind, so folgt, dass die erhaltene Bedingung gleichbedeutend damit ist, dass in diesem Falle die Covariante M identisch verschwindet. Dies ist ein specieller Fall eines allgemeinen von Herrn Pasch bewiesenen Theorems. Setzt man nämlich:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^{\lambda-1} f_1}{\partial x_2^{\lambda-1}}, & \frac{\partial^{\lambda-1} f_1}{\partial x_1\,\partial x_2^{\lambda-2}} \cdots & \frac{\partial^{\lambda-1} f_1}{\partial x_1^{\lambda-1}} \\ \frac{\partial^{\lambda-1} f_2}{\partial x_2^{\lambda-1}}, & \frac{\partial^{\lambda-1} f_2}{\partial x_1\,\partial x_2^{\lambda-2}} \cdots & \frac{\partial^{\lambda-1} f_2}{\partial x_4^{\lambda-1}} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial^{\lambda-1} f_\lambda}{\partial x_2^{\lambda-1}}, & \frac{\partial^{\lambda-1} f_\lambda}{\partial x_1\,\partial x_2^{\lambda-2}} \cdots & \frac{\partial^{\lambda-1} f_\lambda}{\partial x_1^{\lambda-1}} \end{vmatrix} = D(f_1 f_2 f_2 \cdots f_\lambda),$$

so lautet dasselbe:

„Das identische Verschwinden der Determinante $D(f_1 f_2 \ldots f_\lambda)$ von λ binären Formen $m$ten Grades ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die sämmtlichen Determinanten aus dem Systeme

$$\begin{vmatrix} a_0^{(1)} & a_1^{(1)} \ldots a_m^{(1)} \\ a_0^{(2)} & a_1^{(2)} \ldots a_m^{(2)} \\ a_0^{(\lambda)} & a_1^{(\lambda)} \ldots a_m^{(\lambda)} \end{vmatrix}$$

verschwinden; mit anderen Worten, die Bedingung für die Existenz einer linearen homogenen Relation mit constanten Coëfficienten zwischen den Formen $f_1, f_3 \ldots f_\lambda$."

Wir wissen, dass, wenn S_1 und S_2 identisch verschwinden, nothwendig auch die Covariante M identisch verschwinden muss, damit die drei Formen

$$\begin{aligned} & f_1+\lambda_1 f_2 \\ & f_1+\lambda_2 f_2 \\ & f_2+\lambda_3 f_3 \end{aligned}$$

denselben Cubus darstellen. Es genügen aber umgekehrt die Bedingungen

$$M=0 \quad S_1=0,$$

um zu wissen, dass jene Binome denselben Cubus darstellen. Bestehen nämlich die Gleichungen

$$\begin{aligned} f_1+B'f_2+\Gamma'f_3 &= 0 \\ f_1+\lambda_1 f_2 \qquad &= A(x-\alpha)^3, \end{aligned}$$

so erhält man aus denselben durch Subtraction

$$(B'-\lambda_2)f_2+\Gamma' f_3 = -A(x-\alpha)^3$$

oder

$$f_2+\frac{\Gamma'}{B'-\lambda_1}f_3 = -\frac{A}{B'-\lambda_1}(x-\alpha)^3;$$

es ist somit auch das zweite Binom und nach dem obigen auch das dritte derselbe Cubus.

§. 9.

Bildet man die Determinante der Covariante M auf zweierlei Weise, einmal aus der ursprünglichen Gestalt derselben und einmal, indem man M als Aggregat der drei Formen darstellt, so erhält man eine interessante Identität. Bedeuten

$$H,\ H_1,\ H_2$$

die Hesse'schen Determinanten der drei cubischen Formen und setzt man

$$\begin{aligned} \Theta &= (f_1f_2)^2+(f_2f_1)^2 \\ \Theta_2 &= (f_1f_3)^2+(f_3f_1)^2 \\ \Theta_1 &= (f_2f_2)^2+(f_3f_2)^2, \end{aligned}$$

wo $(\varphi\psi)^2$ die zweite Überschiebung bedeutet, so ist

$$4\left\{\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_0 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix}^2\right\}\times\left\{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_0 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2\right\}$$

$$-\left\{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_0 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right\}^2=$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(a_0b_2c_3)^4}\Big\{&(A_1b_2c_3)^4(HH)^2-(A_1b_2c_3)^3(A_1a_2c_3)(H\Theta)^2+(A_1b_2c_3)^3(A_1a_2b_3)(H\Theta_1)^2 \\ &-(A_1b_2c_3)^2(A_1a_2c_3)(A_1a_2b_3)(H\Theta)^2+(A_1b_2c_3)^2(A_1a_2c_3)^2(HH_1)^2+(A_1b_2c_3)^2(A_1a_2b_3)^2(HH_2)^2 \\ &-(A_1b_2c_3)^3(A_1a_2c_3)(H\Theta)^2+(A_1b_2c_3)^2(A_1a_2c_3)^2(\Theta\Theta_1)^2-(A_1b_2c_3)^2(A_1a_2c_3)(A_1a_2b_3)(\Theta\Theta_1)^2 \\ &-(A_1b_2c_3)(A_1a_2c_3)^3(\Theta H_1)^2+(A_1b_2c_3)(A_1a_2c_3)^2(A_1a_2b_3)(\Theta\Theta_2)^2-(A_1b_2c_3)(A_1a_2c_2)(A_1a_2b_3)(\Theta H_2)^2 \\ &+(A_1b_2c_3)^3(A_1a_2b_3)(\Theta_1H)^2-(A_1b_2c_3)^2(A_1a_2c_3)(A_1a_2b_3)(\Theta\Theta_1)^2+(A_1b_2c_3)^2(A_1a_2b_3)^2(\Theta_1\Theta_1)^2 \\ &+(A_1b_2c_3)(A_1a_2c_3)^2(A_1a_2b_3)(\Theta_1H_1)^2-(A_1b_2c_3)(A_1a_2c_3)(A_1a_2b_3)^2(\Theta_1\Theta_2)^2+(A_1b_2c_3)(A_1a_2b_3)^3(\Theta_1H_2)^2 \\ &+(A_1b_2c_3)^2(A_1a_2c_3)^2(HH_1)^2-(A_1b_2c_3)(A_1a_2b_3)^3(H_1\Theta)^2+(A_1b_2c_3)(A_1a_2c_3)^2(A_1a_2b_3)(H_1\Theta_1)^2 \\ &+(A_1a_2c_3)^4(H_1H_1)^2-(A_1a_2c_3)^3(A_1a_2b_3)(H_1\Theta_2)^2+(A_1a_2c_3)^2(A_1a_2b_3)^2(H_1H_2)^2 \\ &-(A_1b_2c_3)^2(A_1a_2c_3)(A_1a_2b_3)(\Theta_2H)^2+(A_1b_2c_3)(A_1a_2c_3)^2(A_1a_2b_3)(\Theta_2\Theta)^2-(A_1b_2c_3)(A_1a_2c_3) \\ &\hspace{25em}(A_1a_2b_3)^2(\Theta_2\Theta_1)^2 \\ &-(A_1a_2c_3)^3(A_1a_2b_3)(\Theta_2H_1)^2+(A_1a_2c_3)^2(A_1a_2b_3)^2(\Theta_2\Theta_2)^2-(A_1a_2c_3)(A_1a_2b_3)^3(\Theta_2H_2)^2 \\ &+(A_1b_2c_3)^2(A_1a_2b_3)^2(HH_2)^2-(A_1b_2c_3)(A_1a_2c_3)(A_1a_2b_3)^2(H_2\Theta)^2+(A_1b_2c_3)(A_1a_2b_3)^3(H_2\Theta_1)^2 \\ &+(A_1a_2c_3)^2(A_1a_2b_3)^2(H_1H_2)^2-(A_1a_2c_3)(A_1a_2b_3)^3(H_2\Theta_2)^2+(A_1a_2b_3)^4(H_2H_2)^2\Big\}. \end{aligned}$$

§. 10.

Zum Schlusse wollen wir einige der oben entwickelten Covarianten geometrisch interpretiren. Die Gleichungen

$$(X_k H_1)^2 = 0 \quad (X_k H_2)^2 = 0 \quad (X_k H_3) = 0$$

stellen offenbar die Bedingungen dar, unter denen die Nullpunkte von X_k ein Punktpaar darstellen, welches resp. zu dem Paare

$$H_1(y) = 0, \quad H_2(y) = 0, \quad H_3(y) = 0$$

harmonisch ist. Für jede Wurzel von $(X_k H_i) = 0$ gibt also $X_k = 0$, wenn man in ihr diese Wurzel einsetzt, ein zum Punktpaare $H_i = 0$ harmonisches Paar.

Die Bedingung, dass die Verschwindungselemente der Covarianten

$$(X_k H_1)^2, \quad (X_k H_2)^2, \quad (X_k H_3)^2$$

in Involution stehen, ist offenbar das Verschwinden ihrer Determinante. Diese ist nach dem obigen ein Product der Determinante der Hesse'schen Covarianten mit der Resultante der betreffenden zwei Fundamentalformen. Da nun im Falle des Verschwindens der Resultante sowohl X_k als auch H_i kein Punktpaar darstellt, weil sie identisch verschwinden, so reducirt sich die genannte Bedingung darauf, dass die Determinante der Hesse'schen Covarianten verschwinden muss. Wir erhalten also das Resultat:

Wenn die Verschwindungselemente der Covarianten

$$(X_k H_1)^2, \quad (X_k H_2)^2, \quad (X_k H_3)^2$$

in Involution stehen, so stehen auch die Nullpunkte von

$$H_1, \quad H_2, \quad H_3$$

in Involution und umgekehrt; mit anderen Worten, wenn zwischen den Hesse'schen Covarianten eine Relation besteht

$$\alpha H + \beta H_1 + \gamma H_2 = 0$$

so bestehen auch die Relationen

$$\begin{aligned}
\alpha_1 (X_1 H_1)^2 + \beta_1 (X_1 H_2)^2 + \gamma_1 (X_1 H_3)^2 &= 0 \\
\alpha_2 (X_2 H_1)^2 + \beta_2 (X_2 H_2)^2 + \gamma_2 (X_2 H_3)^2 &= 0 \\
\alpha_3 (X_3 H_1)^2 + \beta_3 (X_3 H_2)^2 + \gamma_3 (X_3 H_3)^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Die Gleichung

$$\pi = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) \\ \psi_1(x) & \psi_2(x) & \psi_3(x) \\ \chi_1(x) & \chi_2(x) & \chi_3(x) \end{vmatrix} = 0$$

drückt die Bedingung aus, unter der die Nullpunkte von

$$X_1, \quad X_2, \quad {}_3X$$

in Involution stehen. $\pi = 0$ gibt also sechs Werthe von x an, deren jeder in den Formen X_k eingesetzt die Nullpunkte dieser zu drei Punktpaaren in Involution machen.

Bilden wir nun die drei Covarianten mit zwei Reihen von veränderlichen

$$\Phi_1(xy) = (X_1 H_1)^2 y_1^2 + (X_1 H_2)^2 y_1 y_2 + (X_1 H_3)^2 y_2^2$$
$$\Phi_2(xy) = (X_2 H_1)^2 y_1^2 + (X_2 H_2)^2 y_1 y_2 + (X_2 H_3)^2 y_2^2$$
$$\Phi_3(xy) = (X_3 H_1)^2 y_1^2 + (X_3 H_2)^2 y_1 y_2 + (X_3 H_3)^2 y_2^2,$$

so ist die Determinante derselben

$$D(H_1 H_2 H_3)\,\pi.$$

$\Phi_1 = 0$ $\Phi_2 = 0$ $\Phi_3 = 0$ stellen also drei Punktpaare in Involution für jede Wurzel von $\pi = 0$ dar, wenn $D(H_1 H_2 H_3)$ nicht Null ist, und für jeden beliebigen Werth von x, wenn $D(H_1 H_2 H_3)$ Null ist. Wir erhalten also das Resultat:

Wenn $D(H_1 H_2 H_3)$ verschwindet, d. h. wenn die Nullpunkte

$$H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \quad H_3 = 0$$

in Involution sind, so besteht die Relation

$$A\Phi_1(xy) + B\Phi_2(xy) + \Gamma\Phi_3(xy) = 0,$$

wo A, B und Γ Function von x sind.